

BEISPIEL (BARBASHIN UND KRASOVSKII) ¹

Betrachte $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2.$$

und sei

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -\frac{2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}L_f V &= \frac{2x_1}{(1 + x_1^2)^2} \left(-6\frac{x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2 \right) + 2x_2 \frac{-2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2} \\ &= -\frac{12x_1^2}{(1 + x_1^2)^4} + \frac{4x_1x_2}{(1 + x_1^2)^2} - \frac{4x_2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2} \\ &= -\frac{4}{(1 + x_1^2)^2} \left(\frac{3x_1^2}{(1 + x_1^2)^2} + x_2^2 \right).\end{aligned}$$

Somit ist V positiv definit und $L_f V$ negativ definit, d.h. die (einzige) Ruhelage 0 des Systems ist asymptotisch stabil.

Betrachte die Kurve $x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}$. Es gilt

$$\lim_{x_1 \downarrow \sqrt{2}} \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}} = \infty, \quad \lim_{x_1 > \sqrt{2}, x_1 \rightarrow \infty} \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}} = 0.$$

Die Steigung der Tangenten entlang der Kurve ist

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{1 - \sqrt{2}x_1 + \frac{x_1^2}{2}}.$$

Entlang der Kurve gilt

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \Big|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} = -\frac{1}{1 + 2\sqrt{2}x_1 + 2x_1^2}.$$

Somit gilt

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \Big|_{x_2 = \frac{2}{x_1 - \sqrt{2}}} > \frac{dx_2}{dx_1}.$$

¹Konzepte der Regelungstechnik WS2012/2013, Vorlesung 03, Gerd Simon Schmidt, Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, schmidt@ist.uni-stuttgart.de, November 8, 2012

D.h. entlang der Kurve zeigt das Vektorfeld immer in das durch die Kurve abgetrennte Gebiet. Somit verlaufen die Lösungen der Dgl in dem durch die Kurve abgetrennten Gebiet und können dieses nicht in Richtung der Achsen verlassen. Damit gibt es Lösungen die nicht in den Ursprung konvergieren. Das heißt obwohl V positiv definit und $L_f V$ negativ definit ist, gibt es instabile Lösungen. Damit ist das System nicht global asymptotisch stabil.

Illustration der Phasenkurven und der Höhenlinien:

